22

Réduction d'endomorphisme

→ Lemme des noyaux

$P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$, $\forall i \neq j$ $P_i \wedge P_j = 1$

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{Ker} P_1 \cdots P_r(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} P_k(u)}$$

→ u DZ equivaut à

$\iff \exists P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à RS : $P(u) = 0$ (pareil pour les matrices)

$\iff \mu_u$ SARS

$\iff \exists \beta = (e_1, \dots, e_n)$ $\forall i$ $u(e_i) = \lambda e_i$

$\iff \bigoplus_{\lambda \, vp} E_{\lambda, u} = E$

$\iff \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} : \chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\omega_i} \\ \forall i \in [\![1, s]\!] \quad \underbrace{\dim E_{\lambda_i, u}}_{d(\lambda_i)} = \underbrace{\omega_i}_{\beta(\lambda_i)} \end{cases}$

→ Polynôme caractéristique :

$\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr} A \, X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$

→ Matrice compagnon $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

tq $\chi_{C_P} = (-1)^n (X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0)$

→ Cayley Hamilton :

$\forall A \in M_n(\mathbb{K}) : \chi_A(A) = 0$ dém : formule de la comatrice pour $A - XId$

→ u est TZ

$\iff \exists \beta\ [u]_{(\beta)}$ est trig supérieure

$\iff u(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)\ \forall k \in [\![1, m]\!]$.

$\iff \chi_u$ est scindé

$\iff \mu_u$ est scindé

$\iff \exists P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\ P(u) = 0$ et P scindé

→ Jordan-Dunford

u possède un polynôme annulateur scindé $\Rightarrow \exists F_{\lambda_i} \subset E, i = 1 \dots n$

$E = \overset{\sim}{\bigoplus_{i=1}} F_{\lambda_i}$, F_{λ_i} stable par u

$u\Big|_{F_{\lambda_i}}^{F_{\lambda_i}} = \lambda_i I + \underbrace{N_{\lambda_i}}_{\text{nilpo}}$

$F_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i I)^{d_i}$, d_i puiss. du polynôme min

N_{λ_i} d'indice d_i ...

Mini rq : $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i I)^{d_i}$ stationnaire à d_i

↳ $\exists S$ diagonale (ou DZ?), D nilpotente unique tq $u = S + D$ si $\exists P$ SARS $P(u) = 0$ et $[S, D] = 0$

→ La commutation donne la coTZ/coDZ

→ (C.f systèmes lin) Hadamard :

A inversible $\Leftarrow\!\!\!\!\not\Rightarrow$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

↳ Réciproquement, $\forall \lambda \in \operatorname{spec} A$: $\lambda \in D(a_{kk}, \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|)$

→ Revoir espace cyclique : full of stars

→ Astuces topologiques

▷ Hadamard

$\lambda \in \operatorname{spec}(A) \Rightarrow \underset{\exists k \text{ tq}}{\lambda} \in \bigcup_{k=1}^{n} D(a_{kk}, \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j}|)$

conséquence de ~~de~~ (A inversible $\Leftarrow\Rightarrow$ $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{jk}|$)

→ D Z à ε près : $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & b_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ tq $|b_{ij}| < \varepsilon$

$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ $\operatorname{spec} A \subset D(0,1) \Rightarrow A^p \to 0$

→ ~~Δ~~

ASTUCE → $\Omega = \{A \in M_n(\mathbb{C}),\ A$ a n vp 2 à 2 $\neq\}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow$ preuve de C.H : $\forall M \in \Omega$ $\chi_M(M) = 0$ par $\mathcal{C}^0$ devient valable ds $\overline{\Omega} = M_n(\mathbb{C})$

→ Ω ouvert (car $A \in \Omega \Leftarrow\Rightarrow \det(\chi_A'(A)) \neq 0$)

$\longrightarrow$ $|||A||| = \lambda$, λ vp $\Longrightarrow$ λ vp pure (espaço assoct $= \operatorname{Ker}(\lambda I - M)$